Venus' relative størrelse og fase

Steffen Grøndahl

Planeten Venus er værd at studere i teleskop. Med blot en forstørrelse på 20-30 gange, kan man se, at Venus ikke er punktformet og at den ligesom Månen gennemløber faser fra fuld til ny. Men samtidig ændrer den tilsyneladende størrelse af planeten sig, således at den er størst, når den er ny og mindst når den er fuld. Forklaringen er, at Venus ligesom Jorden kredser om Solen, men i en bane nærmere Solen.

I denne artikel beregnes hvorledes Venus fase og relative størrelse ændrer sig med tiden.

1 Venus og Jordens kredsløb om Solen

Både Venus og Jorden kredser om Solen i tilnærmelsesvis cirkelformede baner, med gennemsnitlige baneradier på $r_V = 0,723\ AU$ henholdsvis $r_J = 1\ AU$, hvor $1\ AU = 149,6 \cdot 10^6\ km$ er den såkalde astronomiske enhed.

Omløstiden er mindre for Venus end for Jorden, nemlig $T_V = 224,70\ d$ mod $T_J = 365,25\ d$. Det betyder, at Venus engang imellem overhaler Jorden indenom. Når Venus overhaler Jorden indenom om dermed befinder sig mellem Jorden og Solen, siges Venus at være i indre konjunktion. Da Venus og Jordens baneplaner ikke er sammenfaldende vil det dog være sjældent, at Venus ligefrem går foran Solskiven. Men det skete blandt andet den 8. juni 2004 ved den såkaldte Venuspassage.

(Noget tilsvarende gælder for Månen, som også placerer sig mellem Solen og Jorden ved nymåne, men kun sjældent går ind foran Solen og skaber solformørkelse, da Jordens og Månens baneplaner ikke er sammenfaldende.)

1.1 Venus synodiske omløbstid

I det følgende antages at Venus overhaler Jorden indenom til tiden $t = 0$. Man kan forestille sig, at vi måler tiden på et stopur, som startes netop når Venus overhaler Jorden. Efter et stykke tid vil Venus have flyttet sig vinklen

$$\theta_V = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_V} \tag{1}$$

mens Jorden har flyttes sig vinklen

$$\theta_J = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_J} \tag{2}$$

Se eventuelt figur 1 nedenfor.

Den synodiske omløbsperiode for Venus, T, er tiden mellem to overhalinger (to følgende konjunktioner). Denne er givet ved, at Venus har nået et ekstra omløb, altså taget 2π mere end Jorden:

$$\theta_V = \theta_J + 2 \cdot \pi$$

Indsættes heri (1) og (2) følger

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_J} \tag{3}$$

eller

$$T = \frac{T_V \cdot T_J}{T_J - T_V}$$

Indsættes værdierne $T_V = 224,70\ d$ og $T_J = 365,25\ d$ fås $T = 583,9\ d$, altså knap 584 døgn eller lidt over halvandet år.

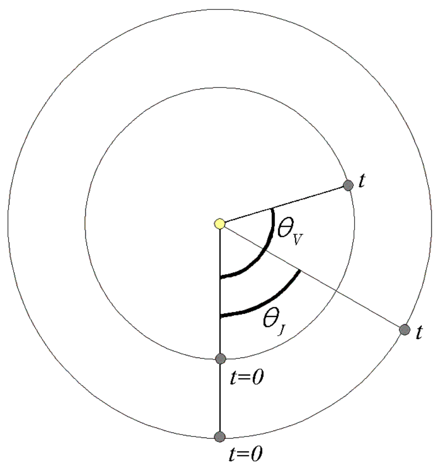

Fig. 1: Til tiden $t = 0$ overhaler Venus Jorden indenom. Til et lidt senere tidspunkt (t) vil Venus have nået vinklen θ_V rundt om Solen, mens Jorden kun har nået vinklen θ_J. Vinklerne er givet ved planeternes omløbstider, (1) henholdsvis (2). Bemærk: Venus er den inderste planet og det er Solen i centrum :o)

2 Venus' tilsyneladende størrelse

Set fra Jorden vil den tilsyneladende størrelse af Venus, altså udstrækningen, ændre sig med tiden. I atronomisk sammenhæng benytter man som regel den vinkel, ω som diameteren af Venus måler (altså set fra Jorden). Af Figur 2 fremgår det, at den er givet ved

$$\omega = 2 \cdot \frac{\omega}{2} \approx 2 \cdot \tan \frac{\omega}{2} = 2 \cdot \frac{R_V}{r} = \frac{2 \cdot R_V}{r} \tag{4}$$

hvor $R_V = 6052\ km$ er Venus' radius og r er afstanden fra Jorden til Venus på det givne tidspunkt. I udledningen er udnyttet, at tangens til en vinkel er tilnærmelsesvis lig med vinklen (målt i radianer), hvis vinklen er lille.

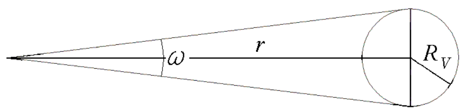

Fig. 2: Den relative størrelse af Venus (udstrækningen) er givet ved vinklen ω, der kan beregnes ud fra Venus' radius R_V og afstanden mellem Venus og Jorden r.

2.1 Afstanden mellem Jorden og Venus

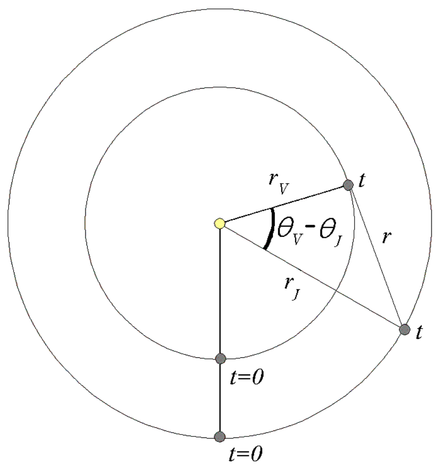

Fig. 3: Til et givent tidspunkt t vil vinklen mellem Venus og Jorden (set fra Solen) være $\theta_V - \theta_J$. Afstanden mellem Venus og Jorden er da r, som kan beregnes ved hjæp af cosinusrelationen.

Af (1), (2) og (3) følger

$$\theta_V - \theta_J = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_V} - \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_J} = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}$$

Af cosinusrelationerne (se Figur 3) følger

$$r^2 = r_V^2 + r_J^2 - 2 \cdot r_V \cdot r_J \cdot \cos(\theta_V - \theta_J)$$

og dermed at afstanden mellem Venus og Jorden er givet ved

$$r = \sqrt{r_V^2 + r_J^2 - 2 \cdot r_V \cdot r_J \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right)} \tag{5}$$

Specielt bemærkes at $r = r_J - r_V$ for $t = 0$ og $t = T$ (altså når Venus er i indre konjunktion) og at $r = r_J + r_V$ for $t = T/2$ (dette kaldes ydre konjunktion).

3 Venus' fase

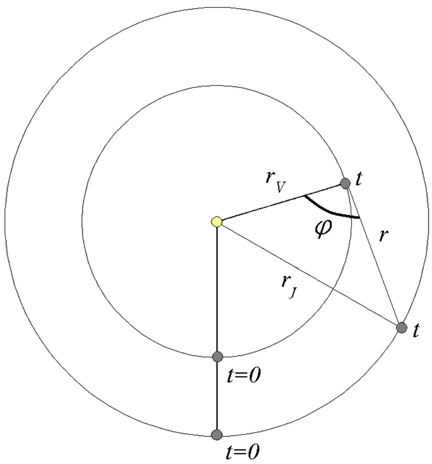

Fig. 4: Vinklen mellem Solen og Jorden set fra Venus (φ) kan beregnes ud fra cosinusrelationer. Samtidig kan den benyttes til at beregne, hvor stor en del af den oplyste del af Venus, der kan ses Jorden.

Vinklen φ (se Figur 4) kan bruges til at bestemme hvor meget af den oplyste del af Venus, der er synlig fra Jorden. Af cosinusrelationerne fås

$$r_J^2 = r_V^2 + r^2 - 2 \cdot r_V \cdot r \cdot \cos(\varphi)$$

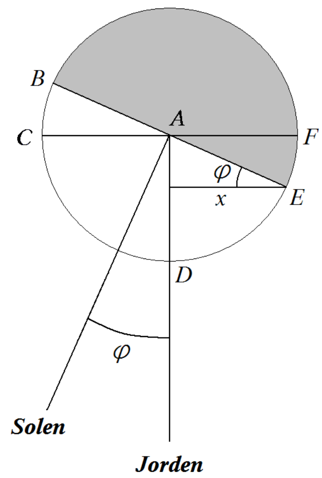

Fig. 5: Et zoom på Venus: Området $ABFEA$ ligger hen i mørke, da det ikke rammes af Solens lys. Fra Jorden ses området $ACDEFA$, hvoraf en bid, $AEFA$ ligger hen i mørke. Området $ACDA$ i sig selv ville gøre, at Venus ville ses som halv fra Jorden. Men i dette tilælde hvor $\varphi < \frac{\pi}{2}$ og $\varphi > 0$ vil der være en ekstra del, $ADEA$, som er oplyst og dermed synlig fra Jorden. Størrelsen x beskriver denne ekstra del kvantitativt.

og dermed

$$\cos(\varphi) = \frac{r_V^2 + r^2 - r_J^2}{2 \cdot r_V \cdot r} \tag{6}$$

Figur 5 viser hvor meget af Venus, der er synligt set fra Jorden. Her i tilfældet hvor $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Specielt størrelsen x er interessant. Den er givet ved:

$$x = R_V \cdot cos(\varphi) = R_V \cdot |cos(\varphi)| \tag{7}$$

Af figur 6 ses hvorledes Venus ter sig ud set fra Jorden. Man ser at den ekstra synlige del er en halv ellipse med storakse $2 \cdot R_V$ og lilleakse $2 \cdot x = 2 \cdot R \cdot |cos(\varphi)|$.

I tilfældet hvor $\varphi > \frac{\pi}{2}$ vil det oplyste område være mindre end en halv; det der mangler i at Venus ses som være halv er igen en ellipse med den halve lilleakse givet ved x - se figur 7. x er her givet ved

$$x = R_V \cdot cos(\phi)$$

hvor

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \varphi$$

og dermed

$$x = R_V \cdot cos(\phi) = R_V \cdot cos(\pi - \varphi) = -R_V \cdot cos(\varphi) = R_V \cdot |cos(\varphi)|$$

altså samme udtryk som ovenfor (7)

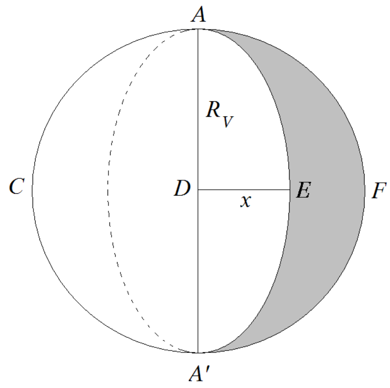

Fig. 6: Venus set fra Jorden. Området $ADA'EA$ udgør en halv ellipse med storakse $2 \cdot R_V$ og lilleakse $2 \cdot x = 2 \cdot R_V \cdot |cos(\varphi)|$. Punktet A' er anti-pol til A.

4 Sammenfatning

Der er her gjort rede for hvorledes Venus' størrelse og fase ændrer sig med tiden. Et kort resume er som følger:

1. Afstanden mellem Jorden og Venus til et givet tidspunkt t er givet ved (5):

$$r = \sqrt{r_V^2 + r_J^2 - 2 \cdot r_V \cdot r_J \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right)}$$

   hvor $T = 583,9\ d$ er den synodiske omløbsperiode, der er givet ved Jorden og Venus' omløbsperiode jævnfør (3) og hvor $r_V = 0,723 \cdot 149,6 \cdot 10^6\ km$ og $r_J = 149,6 \cdot 10^6\ km$. Her skal tiden t regnes i forhold til en given indre konjunktion, for eksempel tiden siden Venuspassagen 8. juni 2004.

2. Den tilsyneladende størrelse af Venus er givet ved (4):

$$\omega \approx \frac{2 \cdot R_V}{r}$$

   hvor $R_V = 6052\ km$.

3. Venus' fase afhænger af vinklen mellem Solen og Jorden set fra Venus, φ. Denne er givet ved (6)

$$\cos(\varphi) = \frac{r_V^2 + r^2 - r_J^2}{2 \cdot r_V \cdot r}$$

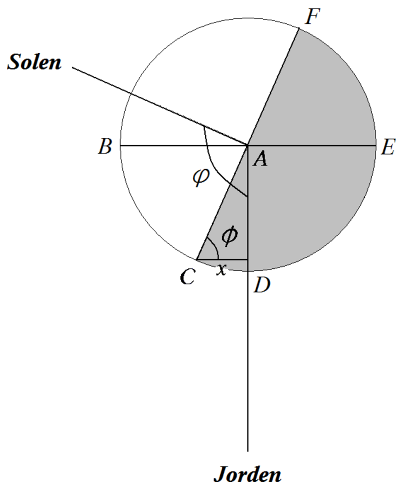

Fig. 7: Et zoom på Venus i tilældet hvor $\varphi > \frac{\pi}{2}$: Området $ACDEFA$ ligger hen i mørke, da det ikke rammes af Solens lys. Fra Jorden ses området $ABCDEA$, hvoraf kun $ABCA$ bliver oplyst. Specielt området $ACDA$ er interessant, da det er det området, der gør, at Venus ikke ses som halv i dette tilfælde.

Vinklen φ bestemmer fasen således:

- Når $\varphi = 0$ vil Venus ses som fuld.
- Når $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ vil Venus ses som over halv fuld. Den ekstra del er givet ved en halv ellipse, hvis halve lilleakse er givet ved $R_V \cdot |cos(\varphi)|$, jævnfør (7) og figur 6.
- Når $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vil Venus ses som halv.
- Når $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ vil Venus ses mindre end halv fuld. Den del der mangler i at være halv fuld er en halv ellipse, hvis halve lilleakse er givet ved $R_V \cdot |cos(\varphi)|$, jævnfør (7).